福建省“高等代数”与“线性代数”课程建设第21次研讨会

关于行列式教学的思考

陈兰清

福建师范大学数学与信息学院

线性代数作为高等院校非数学专业的数学通识教育的一门重要课程，抽象难学，但应用广泛。近年来，许多高校压缩理论课时，如何提高效率以适应线性代数课程的短课时教学是我们面临的一个问题。行列式内容在许多线性代数教材中是开篇第一章，在线性方程组理论、矩阵论、向量组的线性关系理论、二次型、多重积分的变量替换、微分方程组等方面有重要应用。本文结合个人的教学实践，借此机会与各位同行交流探讨行列式教学的难点与策略。

一、n阶行列式定义的教学

现代代数学是建立在很多抽象概念基础之上的，n阶行列式便是线性代数中一个非常典型的抽象概念。对于刚步入大学的新生来说，学习难度较大。当前线性代数教材中对于n阶行列式的概念主要采用逆序法定义和递归法定义两种形式，各有利弊。递归法定义形式较简单，其缺点是不能直接给出行列式的最终结果，从而学生对n阶行列式完全展开的

各项不甚了解，因此，我们采用n阶行列式的逆序法定义进行讲授。那么，如何以较少的课时帮助学生较好地理解和掌握这一抽象数学概念？我们的教学理念是引导学生体验数学思维与研究的完整过程：背景问题研究→总结规律→形成抽象概念。在这一概念的教学过程中，我们认为较困难的是如何总结二阶、三阶行列式定义的规律，进而推广形成n阶行列式的逆序法定义。我们的教学措施如下：

（1）以预备知识的形式，简短介绍n阶排列的逆序数的概念、记号及求法. 设计如下：

预备知识：(不重复)排列的逆序数

定义 由n个不同自然数排成的有序数列称为一个n阶(不重复)排列. 在一个n阶排列中，若有两个数出现左大右小 (即与从小到大的自然顺序相反)，就说这一对数构成1个逆序. 一个排列中逆序的个数叫做这个排列的逆序数. 设$j_1 j_2 .. j_n$是自然数1,2, ..., n的一个n阶排列，其逆序数记为$N(j_1 j_2 .. j_n)$.

$$N(231) = 2.$$

逆序数的计算方法：为了做到不重复不遗漏地计数，我们可以从左到右依次检查每个数左边的更大的数有多少个，再把个数加总.

$$N(\underset{0}{3}\underset{1}{2}\underset{0}{5}\underset{3}{1}\underset{1}{4})=0+1+0+3+1=5$$

（逆序：32; 31,21,51; 54）

（2）引导学生总结二阶、三阶行列式的对角线法则定义的结构规律. 特别强调行列式定义中的$\sum$求和是以排列为求和指标（教学难点）. 设计如下：

二阶行列式定义的结构：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{定义}} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$N(12)=0$ 偶

$N(21)=1$ 奇

$$\xlongequal{\text{改写成}} (-1)^{N(12)}a_{11}a_{22}+(-1)^{N(21)}a_{12}a_{21}$$

$$=\boxed{\sum_{j_1j_2=12,21}(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}}$$

（以2阶排列 j_1j_2为求和指标）

三阶行列式定义的结构：

$$N(231)=2\text{ 偶},\cdots$$
$$N(321)=3\text{奇},\cdots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{定义}}} \; a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\underline{\underline{\text{改写成}}}\;(-1)^{N(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{N(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{N(312)}a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$+(-1)^{N(132)}a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^{N(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{N(321)}a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=\boxed{\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}}$$ （取自不同行不同列，共3!项）

$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$：默认求和指标 $j_1j_2j_3$取遍全部3阶排列时的求和.

n阶行列式的逆序法定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{定义}} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

不同行不同列

$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$：求和指标 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取遍全部 n 阶排列时的求和.（共$n!$项）

补充规定：1 阶行列式 $|a| = a.$

例1 用行列式的逆序数法定义计算

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&0&2&0\\0&3&1&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}$$

解 4阶行列式虽有4! 项，但只需考虑乘积≠0的项.

$$D=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

$$=(-1)^{N(1324)}\ 1\times2\times3\times4$$

$$=(-1)^{1}24=-24$$

$$N(1324)=0+0+1+0=1$$

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&0&2&0\\0&3&1&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}$$

思 考：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = ?$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

例 2 三角形行列式

下三角形

上三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= (-1)^{N(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

二、行列式展开法则的教学

为了节省课时并降低学习难度，我们省略n阶行列式展开法则抽象的证明过程，取而代之的是三阶行列式的演绎过程．设计如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{定义}}{=\!=} \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{记}}{=}a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$ ------按第1行

类似地，3阶行列式定义中的六项重新组合：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\overset{\text{定义}}{=\!=}\begin{array}{l}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{array}$$

$$=a_{21}(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})+a_{23}(a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32})$$

$$=(-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{记}}{=} a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}\text{-------按第2行}$$

定理（展开法则）行列式D等于它的任一行(列)的所有元素与它们对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} =a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\text{ ---按第}i\text{行展开} \\ =a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\text{ ---按第}j\text{列展开} \end{array}$$

行列式展开法则的另一个教学难点是行列式展开法则的重要推论：行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

我们的教学措施是设计如下思考题并引导学生求解.

思考题 设行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$, A_{11}, A_{12}, A_{13}是D的第一行元素的代数余子式，求

(1) $2A_{11}+3A_{12}+6A_{13}$

(3) $4A_{11}+5A_{12}+6A_{13}$

(2) $1A_{11}+2A_{12}+3A_{13}$

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j$$

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=0,\ i\neq j$$

谢谢！

（2019.11.17于泉州）